

Chapitre V

Equations de Maxwell dans le Vide

December 17, 2014

Contents

1	Du régime stationnaire au régime variable	2
1.1	Régime stationnaire	2
1.2	Régime variable	2
2	Propriétés du champ EM	4
2.1	<i>conservation de la densité de charge ρ</i>	4
2.2	<i>relations de passage de (\vec{E}, \vec{B})</i>	4
2.3	Approximation des régimes quasi-stationnaires	5
3	Potentiels électromagnétiques	6
3.1	Potentiels scalaire V et potentiel vecteur \vec{A}	6
3.2	Equations de Laplace	7
3.3	potentiels retardés	8
4	Energie électromagnétique	9
4.1	Densité et courant d'énergie électromagnétique	9
4.2	Conservation de l'énergie en régime variable	10

Dans ce chapitre, nous considérons des champs \vec{E} et \vec{B} variant au cours du temps et nous étudions les lois fondamentales qui les régissent (equations de Maxwell). Nous donnons aussi quelques propriétés de ces champs et de leurs potentiels.

1 Du régime stationnaire au régime variable

1.1 Régime stationnaire

En absence de variation temporelle, le champ électrostatique \vec{E} et magnétostatique \vec{B} vérifient, dans tout repère galiléen, les relations locales suivantes

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (1.1)$$

ρ et \vec{j} sont respectivement les densités statiques de charges et de courants de conduction. Les formes intégrales associées aux eqs(1.1) sont

$$\begin{aligned} \iint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad : \quad \text{th de Gauss} \\ \oint_{C=\partial \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= 0 \\ \iint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_{C=\partial \Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I \quad : \quad \text{th d'Ampère} \end{aligned}$$

avec

$$Q_{\text{int}} = \iiint_V \rho d^3\tau, \quad I = I_{\text{entacés}} = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

1.2 Régime variable

a) *Les 4 équations locales de Maxwell*

En régime variable, nous avons

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0} \quad , \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$$

soit des champs et des densités dépendants des points de l'espace- temps

$$\vec{E} = \vec{E}(M, t) \quad , \quad \vec{B} = \vec{B}(M, t)$$

les équations locales (1.1) des champs \vec{E} , \vec{B} changent et deviennent couplées comme le montre les relations suivantes connues sous l'appellation d'équation de Maxwell:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$: loi de Maxwell- Gauss
$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: loi de Maxwell- Faraday
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$: loi de Maxwell- Thompson
$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$: loi de Maxwell- Ampere

(1.2)

avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ où $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ est la vitesse de la lumière dans le vide et le terme

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

est la densité volumique du courant de déplacement.

b) *equations intégrales*

Les formes intégrales associées aux 4 eqs de Maxwell (1.2) sont

$\iint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$: th de Gauss
$\oint_{C=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = e(t)$: induction électromagnétique
$\iint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$: flux $\Phi_B = 0$
$\oint_{C=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_{entacés} + I_D)$: th d'Ampère généralisé

avec

$$I_D = \iint_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Remarquons que les équations du régime statique (1.1) sont recouvertes en ignorant la variation temporelle.

2 Propriétés du champ EM

2.1 conservation de la densité de charge ρ

La relation de conservation de la densité de charge est donnée par

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0} \quad (2.1)$$

Elle s'ensuit des eqs de Maxwell; en effet à partir de (1.1) et de la propriété

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{B}) = 0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

on tire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} \\ \operatorname{div} \vec{j} &= -\varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

ce qui mène (2.1).

2.2 relations de passage de (\vec{E}, \vec{B})

Les relations de passage des champs électrique et magnétique du cas statique restent valables aussi dans le cas du régime variables.

À la traversée d'une surface Σ de densité de charge σ et de courant \vec{j}_S , les champs (\vec{E}, \vec{B}) des régions 1 et 2 de part et d'autre de la surface de séparation sont reliés comme suit:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{//}(M_2) - \vec{E}_{//}(M_1) &= \vec{0} \\ \vec{E}_{\perp}(M_2) - \vec{E}_{\perp}(M_1) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \quad , \quad \text{discontinueté} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{//}(M_2) - \vec{B}_{//}(M_1) &= \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12} \quad , \quad \text{discontinueté} \\ \vec{B}_{\perp}(M_2) - \vec{B}_{\perp}(M_1) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Sous forme condensée

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1) &= \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12} \end{aligned}}$$

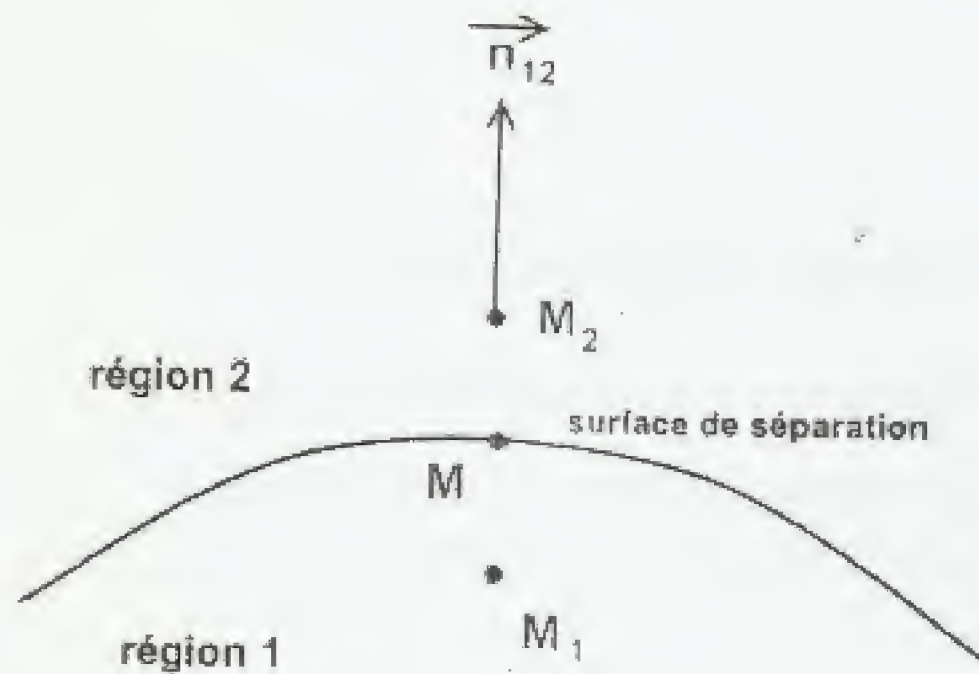


Figure 1: relation de passage des champs \vec{E} et \vec{B}

2.3 Approximation des régimes quasi-stationnaires

À cause des couplages entre champ \vec{E} et champ \vec{B} , les régimes variables sont nettement plus complexes à étudier que les régimes stationnaires.

Si les champs ne varient pas trop vite, on peut utiliser quelques approximations pour simplifier les calculs.

Dans l'approximation quasi-stationnaire, on réduira la relation

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

à celle de la magnétostatique

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

ce qui revient à:

i) ignorer la variation temporelle du champ électrique

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \simeq \vec{0}$$

ii) calculer \vec{B} par le théorème d'ampère comme dans la magnétostatique

3 Potentiels électromagnétiques

3.1 Potentiels scalaire V et potentiel vecteur \vec{A}

Ces champs de potentiels ne sont pas mesurables physiquement;

ce sont donc des intermédiaires de calcul obtenus des eqs de Maxwell de la façon suivante:

a) *potentiel vecteur \vec{A}*

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

il est exprimé en *Tesla* \times *metre* (Tm). Le potentiel vecteur n'est pas unique

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} (\vec{A} + \operatorname{grad} f), \quad \forall f$$

ce qui le rend non mesurable comme mentionné ci-dessus.

b) *potentiel scalaire V*

De la relation

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

il en découle

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Par ailleurs, vu que

$$\vec{A} \sim \vec{A} + \operatorname{grad} f, \quad \forall f$$

on doit avoir

$$V \sim V - \frac{\partial f}{\partial t}$$

Les 2 potentiels V et \vec{A} ne sont donc pas unique puisqu'ils sont définis à un arbitraire f près.

c) *choix de jauge*

Vu l'indétermination de V et \vec{A} , on impose souvent une condition sur ces potentiels; les plus utilisées sont:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} &= 0 & , & \text{ jauge de Lorentz} \\ \operatorname{div} \vec{A} &= 0 & , & \text{ jauge de Coulomb} \end{aligned}$$

3.2 Equations de Laplace

a) *Equations de V et \vec{A} dans la jauge de Lorentz*

En remplaçant les expressions du champ EM en fonction des potentiels V et \vec{A} , les eqs de Maxwell deviennent:

$$\begin{aligned}\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \left(\text{grad} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)\end{aligned}$$

avec

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Dans la jauge de Lorentz, on peut remplacer

$$\text{div} \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$$

ce qui mène aux équations de Laplace pour les potentiels

$$\begin{aligned}\Delta V - \frac{\partial^2 V}{c^2 \partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{c^2 \partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

avec les densités de charge et de courants

$$\begin{cases} \rho = \rho(P, t) \\ \vec{j} = \vec{j}(P, t) \end{cases} \quad \text{si } P \in \mathcal{V}$$

et

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{si } P \notin \mathcal{V}$$

A l'extérieur de \mathcal{V} , les équations de V et \vec{A} coïncident avec les équations de propagation usuelle

$$\Delta \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{c^2 \partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

b) *solution à symétrie sphérique*

Dans le cas où l'on cherche des solutions à symétrie sphérique des équations des potentiels loin des charges et des courants, on écrit (3.1) en coordonnées sphériques.

$$\Psi = \Psi(r, \theta, \varphi)$$

Dire que la solution est à symétrie sphérique, c'est dire que Ψ est indépendante des angles θ et φ ; càd $\Psi = \Psi(r)$. Par conséquent, le laplacien se réduit à

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}$$

avec

$$\Phi = r \cdot \Psi$$

En remplaçant dans (3.1), on a:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{c^2 \partial t^2} = 0$$

qu'on peut factoriser comme

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{c \partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{c \partial t} \right) \Phi = 0$$

et dont la solution générale est donnée par

$$\Phi = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

où $f\left(t - \frac{r}{c}\right)$ est une onde progressive, $g\left(t + \frac{r}{c}\right)$ est une onde régressive et $\tau = \frac{r}{c}$ le temps de propagation du point source P au point M.

En 2 points (t_1, r_1) et (t_2, r_2) d'espace-temps différents avec

$$t_1 - \frac{r_1}{c} = t_2 - \frac{r_2}{c}$$

on tire

$$(t_2 - t_1) = \frac{1}{c}(r_2 - r_1) \Rightarrow \begin{cases} \text{progressive } (r_2 > r_1) & \text{si } t_2 > t_1 \\ \text{regressive } (r_2 < r_1) & \text{si } t_2 < t_1 \end{cases}$$

3.3 potentiels retardés

Dans le cas d'un milieu infini, l'onde réfléchie est nulle, d'où

$$\begin{aligned} \Psi(r, t) &= \frac{f(t - \frac{r}{c})}{r} \\ &\simeq \frac{f(t)}{r} - \frac{1}{c} f'(t) \quad \text{dans le cas } \frac{r}{c} \ll 1 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0} & : & \text{cas scalaire} \\ \vec{f}(t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(t) & : & \text{cas vectoriel} \end{aligned}$$

Ainsi, les densités de potentiels scalaire et vecteur en régime quasi-stationnaire sont alors

$$\frac{dV(t, M)}{d^3\tau} = \frac{\rho\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\frac{d\vec{A}(t, M)}{d^3\tau} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

soit, par integration sur les distributions de charges et de courants, on obtient les potentiels retardés, créés au point P à l'instant $\left(t - \frac{r}{c}\right)$ et arrivant au point M à l'instant t avec un retard de $\frac{r}{c}$.

$$V(t, M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} d^3\tau$$

$$\vec{A}(t, M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} d^3\tau$$

4 Energie électromagnétique

4.1 Densité et courant d'énergie électromagnétique

a) densité d'énergie

Les régions où est localisé le champ (\vec{E}, \vec{B}) contiennent une énergie électromagnétique dont la densité volumique $u = u(M)$ est donnée par

$$u = \epsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$$

L'unité de u est Joules/m³.

b) vecteur de Poynting

Ce vecteur donné par

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{en Watts/m}^2$$

est défini en tout point M de l'espace où existe un champ électromagnétique.

Son flux à travers une surface fermée S soit égal à la puissance électromagnétique \mathcal{P}_{ray} traversant S ,

$$\mathcal{P}_{ray} = \iint_S \vec{R} \cdot d\vec{S}$$

4.2 Conservation de l'énergie en régime variable

a) *équation de conservation*

L'énergie électromagnétique contenue dans un volume \mathcal{V} varie de 2 façons:

- énergie u_1 qui entre ou qui sort au travers de la surface \mathcal{S} délimitant \mathcal{V} ,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{R} = 0$$

- énergie u_2 échangée avec les charges contenues dans le volume \mathcal{V}

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

Les variations de $u_1 + u_2 = u$ donnent localement l'équation de conservation suivante

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{R} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0} \quad (4.1)$$

Pour le volume fini \mathcal{V} , cette relation devient:

$$\frac{dU}{dt} = - \iint_{\mathcal{S}} \vec{R} \cdot d\vec{S} - \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E}$$

avec

$$U = \iiint_{\mathcal{V}} u(M) d\tau$$

b) *preuve de la relation (4.1)*

On part des eqs de Maxwell suivantes

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Puis on multiplie scalairement la première équation par \vec{B} et la deuxième équation par \vec{E} ; on obtient:

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) &= \mu_0 \vec{E} \cdot \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

qu'on peut également écrire comme

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} \\ \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) &= \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \end{aligned}$$

Retranchons membre à membre ces 2 relations,

$$\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\mu_0 \left[\vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) \right]$$

et utilisons l'identité

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

pour la ramener à

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.2)$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} & , & \text{vecteur de Poynting} \\ u &= \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} & , & \text{densité d'énergie em} \end{aligned}$$